# Note on the spatial generalized moments procedure

Jan Mutl*

December 2, 2008

**Abstract**

This note works out the modifications required to the spatial GM estimation procedure when the common normalization assumption that no observation is its own neighbour is not satisfied.

**Keywords:** spatial GM, spatial panel data model, error component model

**JEL Codes**: C13, C21, C23

It is a customary normalization assumption in field of spatial econometrics that the underlying 'space' is such that no observation is viewed as its own neighbour. However, in some practical applications, it may be needed to use models which violate this assumption.[1] Although this is indeed just a normalization and the usual estimation procedures do not rely on this assumption, there is one exception in an important component of the spatial econometrics toolbox. If the model under consideration does not contain any additional explanatory variables other than the spatial lag itself,[2] the standard procedure is to use the spatial generalized moments estimation (spatial GM).[3] The spatial GM procedure relies on moment conditions that need to be modified if the normalization assumption does not hold. This note works out the modified moments and verifies that the procedure based on modified moments has the usual asymptotic properties.

The model under consideration is:

$$\begin{aligned} u_{it,N} &= \rho \sum_{i=1}^{N} w_{ij,N} u_{jt,N} + \varepsilon_{it,N}, \qquad (1) \\ \varepsilon_{it,N} &= \mu_{i,N} + v_{it,N}, \end{aligned}$$

*Institute for Advanced Studies, Stumpergasse 56, 1060 Vienna, email: mutl@ihs.ac.at

[1] For example, in estimating new economic geography models it is necessary to include the contribution of each region to its own real market potential. See e.g. Hanson (2005), Mion (2004), Huber et al. (2006), or Bode and Mutl (2008).

[2] Such model in ususally clasified as and a pure SAR(1) in terminology of Anselin (1988). This situation commonly arrises when the model under consideration is based on estimated disturbances. The spatial GM estimator is then used as an input into the spatial counterpart of the Cochrane-Orcutt transformation.

[3] See e.g. Kelejian and Prucha (1999) for description of the procedure and a proof of its consistency. Kapoor et al. (2007) extend the method to static panels.

where $\mu_{i,N}$ and $\upsilon_{it,N}$ are mutually independent innovations satisfying the regularity assumptions in Kapoor et al. (2007). The spatial weights $w_{ij,N}$ are known and fixed and, as a normalization, it is assumed that $w_{ii,N} = 0$. In matrix notation, the model can be written as

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_N &= \rho \left( \mathbf{I}_T \otimes \mathbf{W}_N \right) \mathbf{u}_N + \boldsymbol{\varepsilon}_N, \\ \boldsymbol{\varepsilon}_N &= \left( \iota_T \otimes \mathbf{I}_N \right) \end{aligned} \tag{2}$$

The estimation proposed in Kapoor et al. (2007) utilizes the following theoretical moment conditions (see their equation 13):

$$\begin{aligned} E \frac{1}{N(T-1)} \boldsymbol{\varepsilon}'_N \mathbf{Q}_{0,N} \boldsymbol{\varepsilon}_N &= \sigma_\upsilon^2, \\ E \frac{1}{N(T-1)} \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}'_N \mathbf{Q}_{0,N} \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_N &= \sigma_\upsilon^2 N^{-1} tr \left( \mathbf{W}'_N \mathbf{W}_N \right), \\ E \frac{1}{N(T-1)} \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}'_N \mathbf{Q}_{0,N} \boldsymbol{\varepsilon}_N &= 0, \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} E \frac{1}{N} \boldsymbol{\varepsilon}'_N \mathbf{Q}_{1,N} \boldsymbol{\varepsilon}_N &= \sigma_1^2, \\ E \frac{1}{N} \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}'_N \mathbf{Q}_{1,N} \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_N &= \sigma_1^2 N^{-1} tr \left( \mathbf{W}'_N \mathbf{W}_N \right), \\ E \frac{1}{N} \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}'_N \mathbf{Q}_{1,N} \boldsymbol{\varepsilon}_N &= 0. \end{aligned}$$

However, these moments need to be modified if the assumption $w_{ii,N} = 0$ is dropped. In particular, we then have:

$$
\begin{aligned}
E\frac{1}{N(T-1)}\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_N'\mathbf{Q}_{0,N}\boldsymbol{\varepsilon}_N &= E\frac{1}{N(T-1)}\boldsymbol{\varepsilon}_N'\left(\mathbf{I}_T\otimes\mathbf{W}_N'\right)\mathbf{Q}_{0,N}\boldsymbol{\varepsilon}_N \qquad (4)\\
&= E\frac{1}{N(T-1)}\boldsymbol{\varepsilon}_N'\mathbf{Q}_{0,N}\left(\mathbf{I}_T\otimes\mathbf{W}_N'\right)\boldsymbol{\varepsilon}_N\\
&= E\frac{1}{N(T-1)}tr\left[\boldsymbol{\varepsilon}_N\boldsymbol{\varepsilon}_N'\mathbf{Q}_{0,N}\left(\mathbf{I}_T\otimes\mathbf{W}_N'\right)\right]\\
&= \frac{1}{N(T-1)}tr\left[E\left(\boldsymbol{\varepsilon}_N\boldsymbol{\varepsilon}_N'\right)\mathbf{Q}_{0,N}\left(\mathbf{I}_T\otimes\mathbf{W}_N'\right)\right]\\
&= \frac{1}{N(T-1)}tr\left[\left(\sigma_\upsilon^2\mathbf{Q}_{0,N}+\sigma_1^2\mathbf{Q}_{1,N}\right)\mathbf{Q}_{0,N}\left(\mathbf{I}_T\otimes\mathbf{W}_N'\right)\right]\\
&= \frac{\sigma_\upsilon^2}{N(T-1)}tr\left[\mathbf{Q}_{0,N}\left(\mathbf{I}_T\otimes\mathbf{W}_N'\right)\right]\\
&= \frac{\sigma_\upsilon^2}{N(T-1)}tr\left[\left(\left(\mathbf{I}_T-\frac{\mathbf{J}_T}{T}\right)\otimes\mathbf{I}_N\right)\left(\mathbf{I}_T\otimes\mathbf{W}_N'\right)\right]\\
&= \frac{\sigma_\upsilon^2}{N(T-1)}tr\left[\left(\mathbf{I}_T-\frac{\mathbf{J}_T}{T}\right)\otimes\mathbf{W}_N'\right]\\
&= \frac{\sigma_\upsilon^2}{N(T-1)}\left[T\left(1-\frac{1}{T}\right)\right]tr\left(\mathbf{W}_N'\right)\\
&= \frac{\sigma_\upsilon^2}{N}tr\left(\mathbf{W}_N'\right)\neq 0.
\end{aligned}
$$

Analogically

$$
\begin{aligned}
E\frac{1}{N(T-1)}\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_N'\mathbf{Q}_{1,N}\boldsymbol{\varepsilon}_N &= \frac{1}{N(T-1)}tr\left[\left(\sigma_\upsilon^2\mathbf{Q}_{0,N}+\sigma_1^2\mathbf{Q}_{1,N}\right)\mathbf{Q}_{1,N}\left(\mathbf{I}_T\otimes\mathbf{W}_N'\right)\right]\\
&= \frac{\sigma_1^2}{N(T-1)}tr\left[\mathbf{Q}_{1,N}\left(\mathbf{I}_T\otimes\mathbf{W}_N'\right)\right] \qquad (5)\\
&= \frac{\sigma_1^2}{N(T-1)}tr\left[\left(\frac{\mathbf{J}_T}{T}\otimes\mathbf{I}_N\right)\left(\mathbf{I}_T\otimes\mathbf{W}_N'\right)\right]\\
&= \frac{\sigma_1^2}{N(T-1)}tr\left(\frac{\mathbf{J}_T}{T}\otimes\mathbf{W}_N'\right)\\
&= \frac{\sigma_1^2}{N(T-1)}\frac{T}{T}tr\left(\mathbf{W}_N'\right)\\
&= \frac{\sigma_1^2}{N(T-1)}tr\left(\mathbf{W}_N'\right)\neq 0.
\end{aligned}
$$

The rest of the moment conditions remains unchanged. This leads to a slight modification of the spatial GM estimation procedure. In particular, equaiton (15) in Kapoor et al. (2007) has to be modified and becomes:

$$
\boldsymbol{\Gamma}_N\cdot\left[\rho,\rho^2,\sigma_\upsilon^2,\sigma_1^2\right]'-\boldsymbol{\gamma}_N=\mathbf{0}, \qquad (6)
$$

where

$$\mathbf{\Gamma}_N = \begin{bmatrix} \gamma^0_{11,N} & \gamma^0_{13,N} & \gamma^0_{13,N} & 0 \\ \gamma^0_{21,N} & \gamma^0_{22,N} & \gamma^0_{23,N} & 0 \\ \gamma^0_{31,N} & \gamma^0_{32,N} & \gamma^0_{33,N} & 0 \\ \gamma^1_{11,N} & \gamma^1_{12,N} & 0 & \gamma^1_{13,N} \\ \gamma^1_{21,N} & \gamma^1_{22,N} & 0 & \gamma^1_{23,N} \\ \gamma^1_{31,N} & \gamma^1_{32,N} & 0 & \gamma^1_{33,N} \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{\gamma}_N = \begin{bmatrix} \gamma^0_{1,N} \\ \gamma^0_{2,N} \\ \gamma^0_{3,N} \\ \gamma^1_{1,N} \\ \gamma^1_{2,N} \\ \gamma^1_{3,N} \end{bmatrix},$$

and $(i = 1, 2)$

$$\begin{aligned} \gamma^i_{11,N} &= \frac{2}{N(T-1)^{1-i}} E\mathbf{u}'_N Q_{i,N} \overline{\mathbf{u}}_N, \ \gamma^i_{12,N} = \frac{-1}{N(T-1)^{1-i}} E\overline{\mathbf{u}}'_N Q_{i,N} \overline{\mathbf{u}}_N, \\ \gamma^i_{21,N} &= \frac{2}{N(T-1)^{1-i}} E\overline{\overline{\mathbf{u}}}'_N Q_{i,N} \overline{\mathbf{u}}_N, \ \gamma^i_{22,N} = \frac{-1}{N(T-1)^{1-i}} E\overline{\overline{\mathbf{u}}}'_N Q_{i,N} \overline{\overline{\mathbf{u}}}_N, \\ \gamma^i_{31,N} &= \frac{1}{N(T-1)^{1-i}} E\left(\mathbf{u}'_N Q_{i,N} \overline{\overline{\mathbf{u}}}_N + \overline{\mathbf{u}}'_N Q_{i,N} \overline{\mathbf{u}}_N\right), \ \gamma^i_{32,N} = \frac{-1}{N(T-1)^{1-i}} E\overline{\mathbf{u}}'_N Q_{i,N} \overline{\overline{\mathbf{u}}}_N, \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \gamma^i_{13,N} &= 1, \ \gamma^i_{1,N} = \frac{1}{N(T-1)^{1-i}} E\mathbf{u}'_N Q_{i,N} \mathbf{u}_N, \\ \gamma^i_{23,N} &= \frac{1}{N} tr\left(\mathbf{W}'_N \mathbf{W}_N\right), \ \gamma^i_{2,N} = \frac{1}{N(T-1)^{1-i}} E\overline{\mathbf{u}}'_N Q_{i,N} \overline{\mathbf{u}}_N, \\ \gamma^i_{33,N} &= \frac{1}{N} tr\left(\mathbf{W}'_N\right), \ \gamma^i_{3,N} = \frac{1}{N(T-1)^{1-i}} E\mathbf{u}'_N Q_{i,N} \overline{\mathbf{u}}_N. \end{aligned}$$

The spatial generalized moments procedure than removes the expectations in the above system of moment conditions and replaces the vector residuals $\mathbf{u}_N$ by its estimated counterpart (if these are not observed).

Note that Assumption 5 in Kapoor et al. (2007) needs to be modified in that it has to refer to the redefined matrix $\mathbf{\Gamma}_N$. However, the rest of the assumptions in the paper can remain unchanged. Inspection of the proofs reveals that the assumption of zero diagonal of the spatial weights matrix is not invoked and hence the claims about the properties of the spatial GM estimator still apply for the modification considered in this note.

A final consideration is to adjust the weights of the moment conditions in the estimation procedure. Kapoor et al. (2007) suggest to use weights based on the variance-covariance matrix of the moment conditions derived under the normality assumption. We follow their approach and note that in this case the VC matrix of the moments (in an analogy to their equation 26) is:

$$\mathbf{\Xi}_N = \begin{bmatrix} \frac{1}{T-1}\sigma^4_v & 0 \\ 0 & \sigma^4_1 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{T}_W, \tag{8}$$

$$T_W = \begin{bmatrix} 2 & 2tr\left(\frac{\mathbf{W}_N'\mathbf{W}_N}{N}\right) & tr\left(\frac{\mathbf{W}_N'+\mathbf{W}_N}{N}\right) \\ 2tr\left(\frac{\mathbf{W}_N'\mathbf{W}_N}{N}\right) & 2tr\left(\frac{\mathbf{W}_N'\mathbf{W}_N\mathbf{W}_N'\mathbf{W}_N}{N}\right) & tr\left(\frac{\mathbf{W}_N'\mathbf{W}_N\left(\mathbf{W}_N'+\mathbf{W}_N\right)}{N}\right) \\ tr\left(\frac{\mathbf{W}_N'+\mathbf{W}_N}{N}\right) & tr\left(\frac{\mathbf{W}_N'\mathbf{W}_N\left(\mathbf{W}_N'+\mathbf{W}_N\right)}{N}\right) & tr\left(\frac{\mathbf{W}_N'\mathbf{W}_N+\mathbf{W}_N'\mathbf{W}_N}{N}\right) \end{bmatrix}$$

Finally, we verify the small sample properties of the adjusted estimaiton procedure by replicating the Monte Carlo study in Kapoor et al. (2007) with a slight modification allowing for non-zero entries on the main diagonal of the spatial weights matrices used in generating the data. In particular, we take each of their weights matrices, denoted by $\mathbf{W}_N^0$ and generate our spatial weights as

$$\mathbf{W}_N = \tau\mathbf{I}_N + (1-\tau)\,\mathbf{W}_N^0, \tag{9}$$

where the parameter $\tau$ reprezents the proportion of the diagonal entries in the spatial weights. Thus we consider the three weight matrices in Kapoor et al. (2007) with $J = 2, 6$ and 10 non-zero off-diagonal elements, as well as their modifications by choosing a value of $\tau$ from the set $\{0, .25, .5, .9\}$. The rest of the simulation design follows Kapoor et al. (2007). In particular, we generate the data from

$$y_{it} = x_{1,it} + x_{2,it} + u_{it}, \tag{10}$$

where the disturbances $u_{it}$ are generated from the SAR(1) process described above with values for $\rho$ from the set $\{-9., -.5, -.25, 0, .25, .5, .9\}$ and setting $\sigma_\varepsilon^2 = \sigma_\mu^2 = 1$. In all our experiments we set $T = 5$ and $N = 100$ and thus $\sigma_1^2 = 6$. The exogenous variables $x_{1,it}$ and $x_{2,it}$ are generated once from $x_{k,it} \sim N\left(0, \sigma_{ik}^2\right)$ where the variances $\sigma_{ik}^2$ are drawn (once) from a standartizerd $\chi^2$ distribution.

We replicate the data 1,000 times and use the the artifitial samples in several variants of a feasible generalized least squares procedure (FGLS). The procedures differ along two dimensions. First we use either the true disturbances or residuals from initial OLS regression as an input in the spatial GM procedure. Secondly, the spatial GM procedure uses either the first three (unweighted) moments and then calculates the estimate $\sigma_1^2$ from the fourth moment condition, or it uses the full set of six moments conditions weighted by the inverse of their VC matrix (under normality). Thus there are four estimators in total.

Results are reported below in Tables 1-4 and confirm that our extentions of the spatial GM procedure works well in small samples. We note that the root mean squared error (RMSE) of all of the estimators deteriorates as the proportion of the diagonal elements of the spatial weights matrix increases. This is to be expected since such increase increases the variance of the disturbances and lowers the expected $R^2$. This is especially true when the degree of spatial autocorrelation in the disturbance is also high. When calculating the RMSE, we exclude those instances where the estimator of $\rho$ converged outside of a predetermined optimization space of $(-100, 100)$. We observe such non-convergence when $\rho = \pm.9$, $\tau = .9$ and $J = 2$ (i.e. when the spatial weight matrix $\mathbf{W}$ is extremely sparse). Note that this only affects the spatial GM procedure using the full set of six moment conditions converges outside of a predetermined optimization space of $(-100, 100)$. This does not happen at other parameter values and never happens for the spatial GM procedure using only the first three moment conditions. Other than that, our results follow the same pattern as those reported in Kapoor et al. (2007).

# References


[1] Anselin, L., 1988, *Spatial Econometrics: Methods and Models* (Kluwer Academic Publishers, Boston).

[2] Bode, E. and J. Mutl, 2008, Approximating and instrumenting the real market potential, mimeo.

[3] Hanson, G. (2005), Market Potential, Increasing Returns, and Geographic Concentration. *Journal of International Economics* 67(1): 1–24.

[4] Huber, P., M. Pfaffermayr, and Y. Wolfmayr (2006), Are there Border Effects in the EU Wage Function? CESifo Working Paper 1880. Munich.

[5] Kapoor, M., H.H. Kelejian and I.R. Prucha, 2007, Panel Data Models with Spatially Correlated Error Components, *Journal of Econometrics* 140, 97-130.

[6] Kelejian, H.H. and I.R. Prucha, 1999, A Generalized Moments Estimator for the Autoregressive Parameter in a Spatial Model, *International Economic Review* 40, 509-533.

[7] Mion, G. (2004), Spatial Externalities and Empirical Analysis: The Case of Italy. *Journal of Urban Economics* 56 (1): 97–118.

**Table 1: RMSE of the FGLS estimators of b_1**

| Parameter values | | | FGLS based on: | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *J* | *tau* | *rho* | *true disturbances* | *true disturbances, weighted* | *estimated disturbances* | *estimated disturbances, weighted* |
| 2 | 0 | -0,9 | 0,0590 | 0,0601 | 0,0590 | 0,0600 |
| 2 | 0 | -0,5 | 0,0747 | 0,0747 | 0,0747 | 0,0747 |
| 2 | 0 | -0,25 | 0,0896 | 0,0896 | 0,0896 | 0,0896 |
| 2 | 0 | 0 | 0,1120 | 0,1120 | 0,1120 | 0,1120 |
| 2 | 0 | 0,25 | 0,1492 | 0,1492 | 0,1492 | 0,1492 |
| 2 | 0 | 0,5 | 0,2238 | 0,2238 | 0,2238 | 0,2238 |
| 2 | 0 | 0,9 | 1,1186 | 1,1190 | 1,1186 | 1,1186 |
| 2 | 0,25 | -0,9 | 0,0590 | 0,0590 | 0,0590 | 0,0590 |
| 2 | 0,25 | -0,5 | 0,0747 | 0,0747 | 0,0747 | 0,0747 |
| 2 | 0,25 | -0,25 | 0,0896 | 0,0896 | 0,0896 | 0,0896 |
| 2 | 0,25 | 0 | 0,1120 | 0,1120 | 0,1120 | 0,1120 |
| 2 | 0,25 | 0,25 | 0,1492 | 0,1492 | 0,1492 | 0,1492 |
| 2 | 0,25 | 0,5 | 0,2238 | 0,2238 | 0,2238 | 0,2238 |
| 2 | 0,25 | 0,9 | 1,1186 | 1,1186 | 1,1186 | 1,1186 |
| 2 | 0,5 | -0,9 | 0,0589 | 0,0589 | 0,0589 | 0,0589 |
| 2 | 0,5 | -0,5 | 0,0747 | 0,0747 | 0,0747 | 0,0747 |
| 2 | 0,5 | -0,25 | 0,0896 | 0,0896 | 0,0896 | 0,0896 |
| 2 | 0,5 | 0 | 0,1120 | 0,1120 | 0,1120 | 0,1120 |
| 2 | 0,5 | 0,25 | 0,1492 | 0,1493 | 0,1492 | 0,1493 |
| 2 | 0,5 | 0,5 | 0,2238 | 0,2238 | 0,2238 | 0,2238 |
| 2 | 0,5 | 0,9 | 1,1186 | 1,1186 | 1,1186 | 1,1186 |
| 2 | 0,9 | -0,9 | 0,0590 | 0,0589 | 0,0590 | 0,0589 |
| 2 | 0,9 | -0,5 | 0,0747 | 0,0747 | 0,0747 | 0,0747 |
| 2 | 0,9 | -0,25 | 0,0896 | 0,0896 | 0,0896 | 0,0896 |
| 2 | 0,9 | 0 | 0,1120 | 0,1120 | 0,1120 | 0,1120 |
| 2 | 0,9 | 0,25 | 0,1494 | 0,1493 | 0,1494 | 0,1493 |
| 2 | 0,9 | 0,5 | 0,2240 | 0,2240 | 0,4804 | 0,2240 |
| 2 | 0,9 | 0,9 | 1,1190 | 1,1190 | 1,1190 | 1,1190 |
| 6 | 0 | -0,9 | 0,0590 | 0,0590 | 0,0590 | 0,0590 |
| 6 | 0 | -0,5 | 0,0747 | 0,0747 | 0,0747 | 0,0747 |
| 6 | 0 | -0,25 | 0,0896 | 0,0896 | 0,0896 | 0,0896 |
| 6 | 0 | 0 | 0,1120 | 0,1120 | 0,1120 | 0,1120 |
| 6 | 0 | 0,25 | 0,1492 | 0,1492 | 0,1492 | 0,1492 |
| 6 | 0 | 0,5 | 0,2238 | 0,2238 | 0,2238 | 0,2238 |
| 6 | 0 | 0,9 | 1,1186 | 1,1186 | 1,1186 | 1,1186 |
| 6 | 0,25 | -0,9 | 0,0590 | 0,0590 | 0,0590 | 0,0590 |
| 6 | 0,25 | -0,5 | 0,0747 | 0,0747 | 0,0747 | 0,0747 |
| 6 | 0,25 | -0,25 | 0,0896 | 0,0896 | 0,0896 | 0,0896 |
| 6 | 0,25 | 0 | 0,1120 | 0,1120 | 0,1120 | 0,1120 |
| 6 | 0,25 | 0,25 | 0,1493 | 0,1493 | 0,1493 | 0,1493 |
| 6 | 0,25 | 0,5 | 0,2238 | 0,2238 | 0,2238 | 0,2238 |
| 6 | 0,25 | 0,9 | 1,1186 | 1,1186 | 1,1186 | 1,1186 |
| 6 | 0,5 | -0,9 | 0,0590 | 0,0590 | 0,0590 | 0,0590 |
| 6 | 0,5 | -0,5 | 0,0747 | 0,0747 | 0,0747 | 0,0747 |
| 6 | 0,5 | -0,25 | 0,0896 | 0,0896 | 0,0896 | 0,0896 |
| 6 | 0,5 | 0 | 0,1120 | 0,1120 | 0,1120 | 0,1120 |
| 6 | 0,5 | 0,25 | 0,1493 | 0,1493 | 0,1493 | 0,1493 |
| 6 | 0,5 | 0,5 | 0,2238 | 0,2238 | 0,2238 | 0,2238 |
| 6 | 0,5 | 0,9 | 1,1187 | 1,1187 | 1,1187 | 1,1187 |
| 6 | 0,9 | -0,9 | 0,0589 | 0,0590 | 0,0589 | 0,0590 |
| 6 | 0,9 | -0,5 | 0,0746 | 0,0747 | 0,0746 | 0,0747 |
| 6 | 0,9 | -0,25 | 0,0895 | 0,0896 | 0,0895 | 0,0896 |
| 6 | 0,9 | 0 | 0,1119 | 0,1120 | 0,1119 | 0,1120 |
| 6 | 0,9 | 0,25 | 0,1492 | 0,1493 | 0,1492 | 0,1493 |
| 6 | 0,9 | 0,5 | 0,2238 | 0,2239 | 0,2238 | 0,2240 |
| 6 | 0,9 | 0,9 | 1,1191 | 1,1191 | 1,1191 | 1,1191 |

**Table 1 (cont.): RMSE of the FGLS estimators of b_1**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 0 | -0,9 | 0,0590 | 0,0590 | 0,0590 | 0,0590 |
| 10 | 0 | -0,5 | 0,0747 | 0,0747 | 0,0747 | 0,0747 |
| 10 | 0 | -0,25 | 0,0896 | 0,0896 | 0,0896 | 0,0896 |
| 10 | 0 | 0 | 0,1120 | 0,1120 | 0,1120 | 0,1120 |
| 10 | 0 | 0,25 | 0,1492 | 0,1492 | 0,1492 | 0,1492 |
| 10 | 0 | 0,5 | 0,2238 | 0,2238 | 0,2238 | 0,2238 |
| 10 | 0 | 0,9 | 1,1186 | 1,1186 | 1,1186 | 1,1186 |
| 10 | 0,25 | -0,9 | 0,0590 | 0,0590 | 0,0590 | 0,0590 |
| 10 | 0,25 | -0,5 | 0,0747 | 0,0747 | 0,0747 | 0,0747 |
| 10 | 0,25 | -0,25 | 0,0896 | 0,0896 | 0,0896 | 0,0896 |
| 10 | 0,25 | 0 | 0,1120 | 0,1120 | 0,1120 | 0,1120 |
| 10 | 0,25 | 0,25 | 0,1492 | 0,1492 | 0,1492 | 0,1492 |
| 10 | 0,25 | 0,5 | 0,2238 | 0,2238 | 0,2238 | 0,2238 |
| 10 | 0,25 | 0,9 | 1,1186 | 1,1186 | 1,1186 | 1,1186 |
| 10 | 0,5 | -0,9 | 0,0589 | 0,0589 | 0,0589 | 0,0589 |
| 10 | 0,5 | -0,5 | 0,0747 | 0,0747 | 0,0747 | 0,0747 |
| 10 | 0,5 | -0,25 | 0,0896 | 0,0896 | 0,0896 | 0,0896 |
| 10 | 0,5 | 0 | 0,1120 | 0,1120 | 0,1120 | 0,1120 |
| 10 | 0,5 | 0,25 | 0,1492 | 0,1493 | 0,1492 | 0,1492 |
| 10 | 0,5 | 0,5 | 0,2238 | 0,2238 | 0,2238 | 0,2238 |
| 10 | 0,5 | 0,9 | 1,1187 | 1,1187 | 1,1187 | 1,1187 |
| 10 | 0,9 | -0,9 | 0,0589 | 0,0589 | 0,0589 | 0,0589 |
| 10 | 0,9 | -0,5 | 0,0747 | 0,0746 | 0,0747 | 0,0746 |
| 10 | 0,9 | -0,25 | 0,0896 | 0,0896 | 0,0896 | 0,0895 |
| 10 | 0,9 | 0 | 0,1120 | 0,1119 | 0,1120 | 0,1119 |
| 10 | 0,9 | 0,25 | 0,1493 | 0,1492 | 0,1493 | 0,1492 |
| 10 | 0,9 | 0,5 | 0,2240 | 0,2239 | 0,2239 | 0,2238 |
| 10 | 0,9 | 0,9 | 1,1189 | 1,1189 | 1,1189 | 1,1189 |

**Table 2: RMSE of the FGLS estimators of b_2**

| Parameter values | | | FGLS based on: | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *J* | *tau* | *rho* | *true disturbances* | *true disturbances, weighted* | *estimated disturbances* | *estimated disturbances, weighted* |
| 2 | 0 | -0,9 | 0,0386 | 0,3761 | 0,0388 | 0,4292 |
| 2 | 0 | -0,5 | 0,0438 | 0,0437 | 0,0440 | 0,0440 |
| 2 | 0 | -0,25 | 0,0463 | 0,0463 | 0,0466 | 0,0465 |
| 2 | 0 | 0 | 0,0477 | 0,0477 | 0,0480 | 0,0480 |
| 2 | 0 | 0,25 | 0,0476 | 0,0476 | 0,0478 | 0,0479 |
| 2 | 0 | 0,5 | 0,0460 | 0,0460 | 0,0462 | 0,0462 |
| 2 | 0 | 0,9 | 0,0413 | 0,2908 | 0,0414 | 0,3328 |
| 2 | 0,25 | -0,9 | 0,0352 | 0,0352 | 0,0354 | 0,0354 |
| 2 | 0,25 | -0,5 | 0,0405 | 0,0405 | 0,0407 | 0,0407 |
| 2 | 0,25 | -0,25 | 0,0441 | 0,0441 | 0,0444 | 0,0443 |
| 2 | 0,25 | 0 | 0,0477 | 0,0477 | 0,0480 | 0,0480 |
| 2 | 0,25 | 0,25 | 0,0509 | 0,0510 | 0,0512 | 0,0512 |
| 2 | 0,25 | 0,5 | 0,0533 | 0,0533 | 0,0535 | 0,0535 |
| 2 | 0,25 | 0,9 | 0,0538 | 0,0538 | 0,0539 | 0,0539 |
| 2 | 0,5 | -0,9 | 0,0316 | 0,0316 | 0,0317 | 0,0317 |
| 2 | 0,5 | -0,5 | 0,0373 | 0,0374 | 0,0376 | 0,0376 |
| 2 | 0,5 | -0,25 | 0,0420 | 0,0420 | 0,0423 | 0,0422 |
| 2 | 0,5 | 0 | 0,0477 | 0,0477 | 0,0480 | 0,0480 |
| 2 | 0,5 | 0,25 | 0,0547 | 0,0547 | 0,0550 | 0,0550 |
| 2 | 0,5 | 0,5 | 0,0630 | 0,0630 | 0,0633 | 0,0633 |
| 2 | 0,5 | 0,9 | 0,0772 | 0,0772 | 0,0772 | 0,0773 |
| 2 | 0,9 | -0,9 | 0,0331 | 0,0311 | 0,0330 | 0,0312 |
| 2 | 0,9 | -0,5 | 0,0415 | 0,0387 | 0,0409 | 0,0390 |
| 2 | 0,9 | -0,25 | 0,0495 | 0,0458 | 0,0489 | 0,0461 |
| 2 | 0,9 | 0 | 0,0612 | 0,0560 | 0,0610 | 0,0563 |
| 2 | 0,9 | 0,25 | 0,0776 | 0,0722 | 0,0782 | 0,0717 |
| 2 | 0,9 | 0,5 | 0,1015 | 0,0999 | 0,1026 | 0,1003 |
| 2 | 0,9 | 0,9 | 0,2460 | 0,2463 | 0,2457 | 0,2459 |

**Table 2 (cont.): RMSE of the FGLS estimators of b_2**

| Parameter values | | | spatial GM based on: | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *J* | *tau* | *rho* | *true disturbances* | *true disturbances, weighted* | *estimated disturbances* | *estimated disturbances, weighted* |
| 6 | 0 | -0,9 | 0,0436 | 0,0436 | 0,0439 | 0,0439 |
| 6 | 0 | -0,5 | 0,0459 | 0,0459 | 0,0462 | 0,0462 |
| 6 | 0 | -0,25 | 0,0470 | 0,0470 | 0,0473 | 0,0473 |
| 6 | 0 | 0 | 0,0477 | 0,0477 | 0,0479 | 0,0480 |
| 6 | 0 | 0,25 | 0,0479 | 0,0479 | 0,0481 | 0,0481 |
| 6 | 0 | 0,5 | 0,0477 | 0,0477 | 0,0478 | 0,0478 |
| 6 | 0 | 0,9 | 0,0464 | 0,0463 | 0,0464 | 0,0464 |
| 6 | 0,25 | -0,9 | 0,0372 | 0,0373 | 0,0375 | 0,0375 |
| 6 | 0,25 | -0,5 | 0,0415 | 0,0415 | 0,0418 | 0,0418 |
| 6 | 0,25 | -0,25 | 0,0444 | 0,0445 | 0,0447 | 0,0448 |
| 6 | 0,25 | 0 | 0,0477 | 0,0477 | 0,0479 | 0,0480 |
| 6 | 0,25 | 0,25 | 0,0511 | 0,0512 | 0,0513 | 0,0514 |
| 6 | 0,25 | 0,5 | 0,0546 | 0,0547 | 0,0548 | 0,0548 |
| 6 | 0,25 | 0,9 | 0,0600 | 0,0600 | 0,0600 | 0,0600 |
| 6 | 0,5 | -0,9 | 0,0351 | 0,0352 | 0,0352 | 0,0355 |
| 6 | 0,5 | -0,5 | 0,0400 | 0,0402 | 0,0399 | 0,0401 |
| 6 | 0,5 | -0,25 | 0,0434 | 0,0435 | 0,0435 | 0,0437 |
| 6 | 0,5 | 0 | 0,0485 | 0,0487 | 0,0485 | 0,0487 |
| 6 | 0,5 | 0,25 | 0,0553 | 0,0554 | 0,0555 | 0,0556 |
| 6 | 0,5 | 0,5 | 0,0640 | 0,0641 | 0,0641 | 0,0642 |
| 6 | 0,5 | 0,9 | 0,0849 | 0,0849 | 0,0850 | 0,0850 |
| 6 | 0,9 | -0,9 | 0,0374 | 0,0314 | 0,0371 | 0,0315 |
| 6 | 0,9 | -0,5 | 0,0472 | 0,0390 | 0,0469 | 0,0392 |
| 6 | 0,9 | -0,25 | 0,0557 | 0,0461 | 0,0553 | 0,0463 |
| 6 | 0,9 | 0 | 0,0677 | 0,0562 | 0,0674 | 0,0566 |
| 6 | 0,9 | 0,25 | 0,0888 | 0,0721 | 0,0889 | 0,0726 |
| 6 | 0,9 | 0,5 | 0,1375 | 0,1003 | 0,1380 | 0,1012 |
| 6 | 0,9 | 0,9 | 0,2594 | 0,2595 | 0,2592 | 0,2598 |
| 10 | 0 | -0,9 | 0,0455 | 0,0456 | 0,0459 | 0,0460 |
| 10 | 0 | -0,5 | 0,0469 | 0,0470 | 0,0473 | 0,0474 |
| 10 | 0 | -0,25 | 0,0475 | 0,0475 | 0,0478 | 0,0479 |
| 10 | 0 | 0 | 0,0478 | 0,0478 | 0,0480 | 0,0481 |
| 10 | 0 | 0,25 | 0,0477 | 0,0478 | 0,0479 | 0,0480 |
| 10 | 0 | 0,5 | 0,0474 | 0,0474 | 0,0476 | 0,0476 |
| 10 | 0 | 0,9 | 0,0463 | 0,0463 | 0,0464 | 0,0464 |
| 10 | 0,25 | -0,9 | 0,0382 | 0,0382 | 0,0385 | 0,0385 |
| 10 | 0,25 | -0,5 | 0,0421 | 0,0421 | 0,0424 | 0,0424 |
| 10 | 0,25 | -0,25 | 0,0448 | 0,0448 | 0,0451 | 0,0451 |
| 10 | 0,25 | 0 | 0,0478 | 0,0478 | 0,0480 | 0,0481 |
| 10 | 0,25 | 0,25 | 0,0510 | 0,0510 | 0,0512 | 0,0512 |
| 10 | 0,25 | 0,5 | 0,0544 | 0,0544 | 0,0545 | 0,0546 |
| 10 | 0,25 | 0,9 | 0,0599 | 0,0599 | 0,0600 | 0,0600 |
| 10 | 0,5 | -0,9 | 0,0351 | 0,0352 | 0,0353 | 0,0356 |
| 10 | 0,5 | -0,5 | 0,0399 | 0,0401 | 0,0398 | 0,0400 |
| 10 | 0,5 | -0,25 | 0,0440 | 0,0442 | 0,0439 | 0,0441 |
| 10 | 0,5 | 0 | 0,0488 | 0,0489 | 0,0487 | 0,0488 |
| 10 | 0,5 | 0,25 | 0,0548 | 0,0549 | 0,0549 | 0,0550 |
| 10 | 0,5 | 0,5 | 0,0636 | 0,0636 | 0,0638 | 0,0637 |
| 10 | 0,5 | 0,9 | 0,0847 | 0,0847 | 0,0849 | 0,0849 |
| 10 | 0,9 | -0,9 | 0,0366 | 0,0309 | 0,0365 | 0,0305 |
| 10 | 0,9 | -0,5 | 0,0466 | 0,0377 | 0,0461 | 0,0379 |
| 10 | 0,9 | -0,25 | 0,0562 | 0,0445 | 0,0555 | 0,0448 |
| 10 | 0,9 | 0 | 0,0683 | 0,0543 | 0,0682 | 0,0548 |
| 10 | 0,9 | 0,25 | 0,0873 | 0,0693 | 0,0882 | 0,0702 |
| 10 | 0,9 | 0,5 | 0,1282 | 0,0966 | 0,1284 | 0,0980 |
| 10 | 0,9 | 0,9 | 0,2558 | 0,2533 | 0,2553 | 0,2535 |

**Table 3: RMSE of the spatial GM estimators of rho**

| Parameter values | | | spatial GM based on: | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *J* | *tau* | *rho* | *true disturbances* | *true disturbances, weighted* | *estimated disturbances* | *estimated disturbances, weighted* |
| 2 | 0 | -0,9 | 0,0612 | 0,0457 | 0,0531 | 0,0436 |
| 2 | 0 | -0,5 | 0,0413 | 0,0497 | 0,0418 | 0,0498 |
| 2 | 0 | -0,25 | 0,0490 | 0,0472 | 0,0492 | 0,0473 |
| 2 | 0 | 0 | 0,0516 | 0,0465 | 0,0516 | 0,0467 |
| 2 | 0 | 0,25 | 0,0490 | 0,0470 | 0,0491 | 0,0472 |
| 2 | 0 | 0,5 | 0,0413 | 0,0493 | 0,0417 | 0,0496 |
| 2 | 0 | 0,9 | 0,0701 | 0,0447 | 0,0535 | 0,0441 |
| 2 | 0,25 | -0,9 | 0,0820 | 0,0753 | 0,0831 | 0,0756 |
| 2 | 0,25 | -0,5 | 0,0819 | 0,0730 | 0,0821 | 0,0732 |
| 2 | 0,25 | -0,25 | 0,0773 | 0,0684 | 0,0774 | 0,0687 |
| 2 | 0,25 | 0 | 0,0695 | 0,0617 | 0,0696 | 0,0620 |
| 2 | 0,25 | 0,25 | 0,0586 | 0,0529 | 0,0588 | 0,0533 |
| 2 | 0,25 | 0,5 | 0,0446 | 0,0420 | 0,0450 | 0,0425 |
| 2 | 0,25 | 0,9 | 0,0425 | 0,0514 | 0,0342 | 0,0415 |
| 2 | 0,5 | -0,9 | 0,2392 | 0,2157 | 0,2384 | 0,2163 |
| 2 | 0,5 | -0,5 | 0,1626 | 0,1418 | 0,1622 | 0,1425 |
| 2 | 0,5 | -0,25 | 0,1336 | 0,1171 | 0,1335 | 0,1178 |
| 2 | 0,5 | 0 | 0,1057 | 0,0933 | 0,1057 | 0,0939 |
| 2 | 0,5 | 0,25 | 0,0789 | 0,0703 | 0,0791 | 0,0708 |
| 2 | 0,5 | 0,5 | 0,0531 | 0,0481 | 0,0535 | 0,0486 |
| 2 | 0,5 | 0,9 | 0,0272 | 0,0279 | 0,0249 | 0,0251 |
| 2 | 0,9 | -0,9 | 1,9646 | 1,9978 | 1,9656 | 2,0025 |
| 2 | 0,9 | -0,5 | 1,5567 | 1,5965 | 1,5493 | 1,5952 |
| 2 | 0,9 | -0,25 | 1,2784 | 1,3334 | 1,2799 | 1,3374 |
| 2 | 0,9 | 0 | 1,0093 | 1,0778 | 1,0114 | 1,0800 |
| 2 | 0,9 | 0,25 | 0,7485 | 0,8138 | 0,7474 | 0,8144 |
| 2 | 0,9 | 0,5 | 0,4850 | 0,5133 | 0,4856 | 0,5171 |
| 2 | 0,9 | 0,9 | 0,0337 | 0,0329 | 0,0343 | 0,0336 |
| 6 | 0 | -0,9 | 0,1115 | 0,1148 | 0,1122 | 0,1174 |
| 6 | 0 | -0,5 | 0,1078 | 0,0986 | 0,1077 | 0,1008 |
| 6 | 0 | -0,25 | 0,1009 | 0,0890 | 0,1007 | 0,0910 |
| 6 | 0 | 0 | 0,0905 | 0,0793 | 0,0904 | 0,0809 |
| 6 | 0 | 0,25 | 0,0766 | 0,0689 | 0,0767 | 0,0701 |
| 6 | 0 | 0,5 | 0,0590 | 0,0571 | 0,0592 | 0,0580 |
| 6 | 0 | 0,9 | 0,0999 | 0,1480 | 0,0932 | 0,1415 |
| 6 | 0,25 | -0,9 | 0,2240 | 0,1904 | 0,2225 | 0,1933 |
| 6 | 0,25 | -0,5 | 0,1792 | 0,1527 | 0,1783 | 0,1551 |
| 6 | 0,25 | -0,25 | 0,1511 | 0,1293 | 0,1506 | 0,1314 |
| 6 | 0,25 | 0 | 0,1230 | 0,1060 | 0,1229 | 0,1078 |
| 6 | 0,25 | 0,25 | 0,0949 | 0,0827 | 0,0951 | 0,0842 |
| 6 | 0,25 | 0,5 | 0,0667 | 0,0591 | 0,0670 | 0,0603 |
| 6 | 0,25 | 0,9 | 0,0638 | 0,0642 | 0,0608 | 0,0624 |
| 6 | 0,5 | -0,9 | 1,4799 | 1,4782 | 1,4702 | 1,4778 |
| 6 | 0,5 | -0,5 | 0,9506 | 0,9447 | 0,9495 | 0,9480 |
| 6 | 0,5 | -0,25 | 0,6486 | 0,6420 | 0,6484 | 0,6447 |
| 6 | 0,5 | 0 | 0,3948 | 0,3828 | 0,3975 | 0,3882 |
| 6 | 0,5 | 0,25 | 0,2579 | 0,2499 | 0,2580 | 0,2515 |
| 6 | 0,5 | 0,5 | 0,1146 | 0,1065 | 0,1068 | 0,0991 |
| 6 | 0,5 | 0,9 | 0,0264 | 0,0250 | 0,0257 | 0,0247 |
| 6 | 0,9 | -0,9 | 1,9634 | 1,9799 | 1,9586 | 1,9824 |
| 6 | 0,9 | -0,5 | 1,5729 | 1,5851 | 1,5562 | 1,5831 |
| 6 | 0,9 | -0,25 | 1,3151 | 1,3255 | 1,3028 | 1,3325 |
| 6 | 0,9 | 0 | 1,0441 | 1,0676 | 1,0408 | 1,0729 |
| 6 | 0,9 | 0,25 | 0,7937 | 0,8112 | 0,7825 | 0,8137 |
| 6 | 0,9 | 0,5 | 0,5257 | 0,5512 | 0,5219 | 0,5521 |
| 6 | 0,9 | 0,9 | 0,0777 | 0,0798 | 0,0773 | 0,0794 |

**Table 3 (cont.): RMSE of the spatial GM estimators of rho**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 0 | -0,9 | 0,1637 | 0,1541 | 0,1627 | 0,1605 |
| 10 | 0 | -0,5 | 0,1480 | 0,1316 | 0,1473 | 0,1372 |
| 10 | 0 | -0,25 | 0,1342 | 0,1173 | 0,1338 | 0,1223 |
| 10 | 0 | 0 | 0,1173 | 0,1024 | 0,1172 | 0,1066 |
| 10 | 0 | 0,25 | 0,0971 | 0,0863 | 0,0973 | 0,0897 |
| 10 | 0 | 0,5 | 0,0970 | 0,1081 | 0,1040 | 0,1195 |
| 10 | 0 | 0,9 | 0,1176 | 0,1319 | 0,1105 | 0,1261 |
| 10 | 0,25 | -0,9 | 0,3160 | 0,2677 | 0,3126 | 0,2763 |
| 10 | 0,25 | -0,5 | 0,2446 | 0,2083 | 0,2430 | 0,2153 |
| 10 | 0,25 | -0,25 | 0,2021 | 0,1730 | 0,2013 | 0,1789 |
| 10 | 0,25 | 0 | 0,1612 | 0,1390 | 0,1611 | 0,1439 |
| 10 | 0,25 | 0,25 | 0,1320 | 0,1190 | 0,1322 | 0,1225 |
| 10 | 0,25 | 0,5 | 0,1105 | 0,1051 | 0,1108 | 0,1081 |
| 10 | 0,25 | 0,9 | 0,0830 | 0,0835 | 0,0797 | 0,0820 |
| 10 | 0,5 | -0,9 | 1,7682 | 1,8085 | 1,7703 | 1,8291 |
| 10 | 0,5 | -0,5 | 1,2273 | 1,2437 | 1,2231 | 1,2500 |
| 10 | 0,5 | -0,25 | 0,9032 | 0,9091 | 0,9017 | 0,9161 |
| 10 | 0,5 | 0 | 0,6582 | 0,6570 | 0,6591 | 0,6593 |
| 10 | 0,5 | 0,25 | 0,4582 | 0,4547 | 0,4586 | 0,4585 |
| 10 | 0,5 | 0,5 | 0,2253 | 0,2209 | 0,2242 | 0,2220 |
| 10 | 0,5 | 0,9 | 0,0529 | 0,0520 | 0,0524 | 0,0526 |
| 10 | 0,9 | -0,9 | 2,0335 | 1,9741 | 1,9551 | 1,9734 |
| 10 | 0,9 | -0,5 | 1,5527 | 1,5725 | 1,5465 | 1,5723 |
| 10 | 0,9 | -0,25 | 1,3015 | 1,3188 | 1,2995 | 1,3225 |
| 10 | 0,9 | 0 | 1,0637 | 1,0667 | 1,0564 | 1,0704 |
| 10 | 0,9 | 0,25 | 0,8022 | 0,8109 | 0,8055 | 0,8165 |
| 10 | 0,9 | 0,5 | 0,5447 | 0,5544 | 0,5456 | 0,5598 |
| 10 | 0,9 | 0,9 | 0,0921 | 0,0967 | 0,0921 | 0,0981 |

**Table 4: RMSE of the spatial GM estimators of sig_v**

| Parameter values | | | spatial GM based on: | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *J* | *tau* | *rho* | *true disturbances* | *true disturbances, weighted* | *estimated disturbances* | *estimated disturbances, weighted* |
| 2 | 0 | -0,9 | 0,0856 | 0,1299 | 0,2441 | 0,1333 |
| 2 | 0 | -0,5 | 0,0769 | 0,0780 | 0,0780 | 0,0788 |
| 2 | 0 | -0,25 | 0,0736 | 0,0726 | 0,0738 | 0,0728 |
| 2 | 0 | 0 | 0,0727 | 0,0716 | 0,0727 | 0,0717 |
| 2 | 0 | 0,25 | 0,0742 | 0,0727 | 0,0742 | 0,0727 |
| 2 | 0 | 0,5 | 0,0781 | 0,0781 | 0,0784 | 0,0784 |
| 2 | 0 | 0,9 | 0,0869 | 0,1281 | 0,1817 | 0,1544 |
| 2 | 0,25 | -0,9 | 0,0719 | 0,0717 | 0,0729 | 0,0727 |
| 2 | 0,25 | -0,5 | 0,0743 | 0,0735 | 0,0746 | 0,0738 |
| 2 | 0,25 | -0,25 | 0,0769 | 0,0754 | 0,0770 | 0,0756 |
| 2 | 0,25 | 0 | 0,0800 | 0,0779 | 0,0801 | 0,0780 |
| 2 | 0,25 | 0,25 | 0,0833 | 0,0808 | 0,0833 | 0,0809 |
| 2 | 0,25 | 0,5 | 0,0864 | 0,0842 | 0,0867 | 0,0846 |
| 2 | 0,25 | 0,9 | 0,0901 | 0,0948 | 0,1416 | 0,1541 |
| 2 | 0,5 | -0,9 | 0,1508 | 0,1342 | 0,1502 | 0,1350 |
| 2 | 0,5 | -0,5 | 0,1412 | 0,1266 | 0,1408 | 0,1273 |
| 2 | 0,5 | -0,25 | 0,1353 | 0,1223 | 0,1352 | 0,1229 |
| 2 | 0,5 | 0 | 0,1291 | 0,1177 | 0,1291 | 0,1183 |
| 2 | 0,5 | 0,25 | 0,1222 | 0,1126 | 0,1224 | 0,1133 |
| 2 | 0,5 | 0,5 | 0,1143 | 0,1070 | 0,1150 | 0,1077 |
| 2 | 0,5 | 0,9 | 0,1011 | 0,0980 | 0,1255 | 0,1206 |
| 2 | 0,9 | -0,9 | 0,9756 | 0,9913 | 0,9761 | 0,9924 |
| 2 | 0,9 | -0,5 | 0,9957 | 0,9938 | 0,9665 | 0,9881 |
| 2 | 0,9 | -0,25 | 0,9569 | 0,9801 | 0,9555 | 0,9815 |
| 2 | 0,9 | 0 | 0,9444 | 0,9719 | 0,9444 | 0,9760 |
| 2 | 0,9 | 0,25 | 0,9499 | 0,9715 | 0,9515 | 0,9790 |
| 2 | 0,9 | 0,5 | 0,8895 | 0,8654 | 0,8893 | 0,8734 |
| 2 | 0,9 | 0,9 | 0,2362 | 0,2196 | 0,2419 | 0,2243 |

**Table 4 (cont.): RMSE of the spatial GM estimators of sig_v**

| Parameter values | | | spatial GM based on: | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *J* | *tau* | *rho* | *true disturbances* | *true disturbances, weighted* | *estimated disturbances* | *estimated disturbances, weighted* |
| 6 | 0 | -0,9 | 0,0775 | 0,0775 | 0,0775 | 0,0776 |
| 6 | 0 | -0,5 | 0,0738 | 0,0734 | 0,0736 | 0,0733 |
| 6 | 0 | -0,25 | 0,0724 | 0,0722 | 0,0724 | 0,0722 |
| 6 | 0 | 0 | 0,0719 | 0,0718 | 0,0719 | 0,0718 |
| 6 | 0 | 0,25 | 0,0721 | 0,0719 | 0,0722 | 0,0721 |
| 6 | 0 | 0,5 | 0,0730 | 0,0728 | 0,0733 | 0,0732 |
| 6 | 0 | 0,9 | 0,0758 | 0,1413 | 0,0845 | 0,1518 |
| 6 | 0,25 | -0,9 | 0,1018 | 0,0939 | 0,1018 | 0,0950 |
| 6 | 0,25 | -0,5 | 0,0983 | 0,0914 | 0,0985 | 0,0924 |
| 6 | 0,25 | -0,25 | 0,0959 | 0,0897 | 0,0961 | 0,0906 |
| 6 | 0,25 | 0 | 0,0931 | 0,0878 | 0,0935 | 0,0887 |
| 6 | 0,25 | 0,25 | 0,0901 | 0,0858 | 0,0905 | 0,0867 |
| 6 | 0,25 | 0,5 | 0,0867 | 0,0835 | 0,0873 | 0,0845 |
| 6 | 0,25 | 0,9 | 0,0855 | 0,0842 | 0,0892 | 0,0877 |
| 6 | 0,5 | -0,9 | 0,6144 | 0,5548 | 0,6105 | 0,5579 |
| 6 | 0,5 | -0,5 | 0,4656 | 0,4287 | 0,4630 | 0,4319 |
| 6 | 0,5 | -0,25 | 0,3709 | 0,3403 | 0,3703 | 0,3437 |
| 6 | 0,5 | 0 | 0,2809 | 0,2512 | 0,2823 | 0,2559 |
| 6 | 0,5 | 0,25 | 0,2239 | 0,2033 | 0,2245 | 0,2062 |
| 6 | 0,5 | 0,5 | 0,1540 | 0,1389 | 0,1515 | 0,1377 |
| 6 | 0,5 | 0,9 | 0,0954 | 0,0919 | 0,0980 | 0,0945 |
| 6 | 0,9 | -0,9 | 0,9943 | 0,9966 | 0,9913 | 0,9965 |
| 6 | 0,9 | -0,5 | 0,9960 | 0,9973 | 0,9781 | 0,9949 |
| 6 | 0,9 | -0,25 | 0,9822 | 0,9940 | 0,9846 | 0,9978 |
| 6 | 0,9 | 0 | 0,9632 | 0,9906 | 0,9706 | 1,0001 |
| 6 | 0,9 | 0,25 | 0,9549 | 0,9815 | 0,9497 | 0,9851 |
| 6 | 0,9 | 0,5 | 0,9047 | 0,9544 | 0,9018 | 0,9571 |
| 6 | 0,9 | 0,9 | 0,4919 | 0,4780 | 0,4906 | 0,4764 |
| 10 | 0 | -0,9 | 0,0755 | 0,0749 | 0,0753 | 0,0750 |
| 10 | 0 | -0,5 | 0,0732 | 0,0727 | 0,0731 | 0,0727 |
| 10 | 0 | -0,25 | 0,0723 | 0,0721 | 0,0723 | 0,0721 |
| 10 | 0 | 0 | 0,0719 | 0,0718 | 0,0719 | 0,0718 |
| 10 | 0 | 0,25 | 0,0719 | 0,0718 | 0,0720 | 0,0719 |
| 10 | 0 | 0,5 | 0,0735 | 0,0765 | 0,0736 | 0,0773 |
| 10 | 0 | 0,9 | 0,0746 | 0,0813 | 0,0771 | 0,0842 |
| 10 | 0,25 | -0,9 | 0,1353 | 0,1199 | 0,1348 | 0,1234 |
| 10 | 0,25 | -0,5 | 0,1224 | 0,1103 | 0,1224 | 0,1133 |
| 10 | 0,25 | -0,25 | 0,1143 | 0,1044 | 0,1146 | 0,1071 |
| 10 | 0,25 | 0 | 0,1063 | 0,0985 | 0,1068 | 0,1008 |
| 10 | 0,25 | 0,25 | 0,0997 | 0,0941 | 0,1003 | 0,0960 |
| 10 | 0,25 | 0,5 | 0,0941 | 0,0906 | 0,0947 | 0,0921 |
| 10 | 0,25 | 0,9 | 0,0894 | 0,0884 | 0,0896 | 0,0886 |
| 10 | 0,5 | -0,9 | 0,7300 | 0,7073 | 0,7292 | 0,7191 |
| 10 | 0,5 | -0,5 | 0,6389 | 0,5938 | 0,6285 | 0,5980 |
| 10 | 0,5 | -0,25 | 0,5306 | 0,4979 | 0,5261 | 0,5035 |
| 10 | 0,5 | 0 | 0,4433 | 0,4177 | 0,4425 | 0,4212 |
| 10 | 0,5 | 0,25 | 0,3636 | 0,3439 | 0,3645 | 0,3485 |
| 10 | 0,5 | 0,5 | 0,2341 | 0,2205 | 0,2338 | 0,2233 |
| 10 | 0,5 | 0,9 | 0,1158 | 0,1129 | 0,1167 | 0,1146 |
| 10 | 0,9 | -0,9 | 2,4237 | 0,9974 | 0,9881 | 0,9972 |
| 10 | 0,9 | -0,5 | 0,9846 | 0,9967 | 0,9845 | 0,9959 |
| 10 | 0,9 | -0,25 | 0,9822 | 0,9945 | 0,9782 | 0,9951 |
| 10 | 0,9 | 0 | 1,0884 | 0,9927 | 0,9876 | 0,9931 |
| 10 | 0,9 | 0,25 | 0,9738 | 0,9858 | 0,9563 | 0,9872 |
| 10 | 0,9 | 0,5 | 0,9237 | 0,9681 | 0,9155 | 0,9741 |
| 10 | 0,9 | 0,9 | 0,5936 | 0,5862 | 0,5948 | 0,5936 |

**Table 5: RMSE of the spatial GM estimators of sig_1**

| Parameter values | | | spatial GM based on: | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *J* | *tau* | *rho* | *true disturbances* | *true disturbances, weighted* | *estimated disturbances* | *estimated disturbances, weighted* |
| 2 | 0 | -0,9 | 0,9017 | 1,0379 | 1,1578 | 1,0716 |
| 2 | 0 | -0,5 | 0,8620 | 0,8672 | 0,8526 | 0,8566 |
| 2 | 0 | -0,25 | 0,8524 | 0,8477 | 0,8403 | 0,8373 |
| 2 | 0 | 0 | 0,8502 | 0,8451 | 0,8372 | 0,8347 |
| 2 | 0 | 0,25 | 0,8556 | 0,8509 | 0,8423 | 0,8400 |
| 2 | 0 | 0,5 | 0,8683 | 0,8728 | 0,8566 | 0,8614 |
| 2 | 0 | 0,9 | 0,9468 | 1,0681 | 1,0904 | 1,0902 |
| 2 | 0,25 | -0,9 | 0,8511 | 0,8461 | 0,8386 | 0,8365 |
| 2 | 0,25 | -0,5 | 0,8599 | 0,8528 | 0,8456 | 0,8422 |
| 2 | 0,25 | -0,25 | 0,8693 | 0,8597 | 0,8544 | 0,8490 |
| 2 | 0,25 | 0 | 0,8806 | 0,8683 | 0,8655 | 0,8575 |
| 2 | 0,25 | 0,25 | 0,8929 | 0,8785 | 0,8780 | 0,8681 |
| 2 | 0,25 | 0,5 | 0,9047 | 0,8909 | 0,8921 | 0,8823 |
| 2 | 0,25 | 0,9 | 0,9299 | 0,9810 | 1,0229 | 1,0707 |
| 2 | 0,5 | -0,9 | 1,1954 | 1,0932 | 1,1616 | 1,0809 |
| 2 | 0,5 | -0,5 | 1,1469 | 1,0579 | 1,1174 | 1,0468 |
| 2 | 0,5 | -0,25 | 1,1188 | 1,0392 | 1,0923 | 1,0289 |
| 2 | 0,5 | 0 | 1,0892 | 1,0194 | 1,0656 | 1,0100 |
| 2 | 0,5 | 0,25 | 1,0575 | 0,9981 | 1,0372 | 0,9898 |
| 2 | 0,5 | 0,5 | 1,0226 | 0,9748 | 1,0070 | 0,9685 |
| 2 | 0,5 | 0,9 | 0,9634 | 0,9372 | 1,0198 | 0,9810 |
| 2 | 0,9 | -0,9 | 5,8530 | 5,9474 | 5,8524 | 5,9546 |
| 2 | 0,9 | -0,5 | 5,9017 | 5,9423 | 5,7975 | 5,9295 |
| 2 | 0,9 | -0,25 | 5,7394 | 5,8798 | 5,7343 | 5,8905 |
| 2 | 0,9 | 0 | 5,6540 | 5,8261 | 5,6572 | 5,8502 |
| 2 | 0,9 | 0,25 | 5,7582 | 5,9050 | 5,7765 | 5,9393 |
| 2 | 0,9 | 0,5 | 5,3670 | 5,2064 | 5,3507 | 5,2649 |
| 2 | 0,9 | 0,9 | 1,6413 | 1,5159 | 1,6504 | 1,5329 |
| 6 | 0 | -0,9 | 0,8683 | 0,8634 | 0,8600 | 0,8547 |
| 6 | 0 | -0,5 | 0,8553 | 0,8491 | 0,8441 | 0,8390 |
| 6 | 0 | -0,25 | 0,8508 | 0,8450 | 0,8385 | 0,8346 |
| 6 | 0 | 0 | 0,8492 | 0,8429 | 0,8358 | 0,8322 |
| 6 | 0 | 0,25 | 0,8506 | 0,8424 | 0,8361 | 0,8315 |
| 6 | 0 | 0,5 | 0,8549 | 0,8440 | 0,8394 | 0,8328 |
| 6 | 0 | 0,9 | 0,9361 | 1,3777 | 0,8705 | 1,0444 |
| 6 | 0,25 | -0,9 | 0,9601 | 0,9082 | 0,9329 | 0,8991 |
| 6 | 0,25 | -0,5 | 0,9468 | 0,8992 | 0,9214 | 0,8902 |
| 6 | 0,25 | -0,25 | 0,9375 | 0,8931 | 0,9133 | 0,8841 |
| 6 | 0,25 | 0 | 0,9275 | 0,8866 | 0,9044 | 0,8776 |
| 6 | 0,25 | 0,25 | 0,9167 | 0,8799 | 0,8948 | 0,8707 |
| 6 | 0,25 | 0,5 | 0,9053 | 0,8727 | 0,8846 | 0,8635 |
| 6 | 0,25 | 0,9 | 0,8915 | 0,8655 | 0,8824 | 0,8634 |
| 6 | 0,5 | -0,9 | 3,8961 | 3,3607 | 3,8258 | 3,3675 |
| 6 | 0,5 | -0,5 | 2,9282 | 2,6341 | 2,8888 | 2,6450 |
| 6 | 0,5 | -0,25 | 2,3792 | 2,1386 | 2,3436 | 2,1447 |
| 6 | 0,5 | 0 | 1,8745 | 1,6523 | 1,8519 | 1,6674 |
| 6 | 0,5 | 0,25 | 1,5567 | 1,3997 | 1,5303 | 1,4054 |
| 6 | 0,5 | 0,5 | 1,1987 | 1,0865 | 1,1560 | 1,0680 |
| 6 | 0,5 | 0,9 | 0,9348 | 0,8949 | 0,9190 | 0,8896 |
| 6 | 0,9 | -0,9 | 5,9775 | 5,9795 | 5,9625 | 5,9793 |
| 6 | 0,9 | -0,5 | 6,0155 | 5,9914 | 5,8731 | 5,9694 |
| 6 | 0,9 | -0,25 | 5,8990 | 5,9635 | 5,8838 | 5,9781 |
| 6 | 0,9 | 0 | 5,7765 | 5,9413 | 5,8223 | 5,9990 |
| 6 | 0,9 | 0,25 | 5,7503 | 5,8840 | 5,6908 | 5,9052 |
| 6 | 0,9 | 0,5 | 5,4458 | 5,7239 | 5,4244 | 5,7379 |
| 6 | 0,9 | 0,9 | 2,9887 | 2,9269 | 2,9801 | 2,9229 |

**Table 5 (cont.): RMSE of the spatial GM estimators of sig_1**

| Parameter values | | | spatial GM based on: | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *J* | *tau* | *rho* | *true disturbances* | *true disturbances, weighted* | *estimated disturbances* | *estimated disturbances, weighted* |
| 10 | 0 | -0,9 | 0,8618 | 0,8583 | 0,8516 | 0,8490 |
| 10 | 0 | -0,5 | 0,8561 | 0,8506 | 0,8437 | 0,8406 |
| 10 | 0 | -0,25 | 0,8547 | 0,8482 | 0,8411 | 0,8379 |
| 10 | 0 | 0 | 0,8552 | 0,8470 | 0,8401 | 0,8364 |
| 10 | 0 | 0,25 | 0,8573 | 0,8471 | 0,8406 | 0,8362 |
| 10 | 0 | 0,5 | 0,8618 | 0,8576 | 0,8403 | 0,8381 |
| 10 | 0 | 0,9 | 0,8919 | 0,9034 | 0,8550 | 0,8625 |
| 10 | 0,25 | -0,9 | 1,1508 | 1,0166 | 1,0987 | 1,0176 |
| 10 | 0,25 | -0,5 | 1,0880 | 0,9771 | 1,0431 | 0,9760 |
| 10 | 0,25 | -0,25 | 1,0501 | 0,9539 | 1,0091 | 0,9513 |
| 10 | 0,25 | 0 | 1,0133 | 0,9317 | 0,9758 | 0,9276 |
| 10 | 0,25 | 0,25 | 0,9836 | 0,9166 | 0,9495 | 0,9112 |
| 10 | 0,25 | 0,5 | 0,9560 | 0,9030 | 0,9262 | 0,8977 |
| 10 | 0,25 | 0,9 | 0,9177 | 0,8849 | 0,8949 | 0,8811 |
| 10 | 0,5 | -0,9 | 4,4232 | 4,2436 | 4,3967 | 4,3340 |
| 10 | 0,5 | -0,5 | 3,8448 | 3,5612 | 3,7655 | 3,5988 |
| 10 | 0,5 | -0,25 | 3,2656 | 3,0218 | 3,2062 | 3,0569 |
| 10 | 0,5 | 0 | 2,7718 | 2,5732 | 2,7291 | 2,5829 |
| 10 | 0,5 | 0,25 | 2,3274 | 2,1476 | 2,2975 | 2,1763 |
| 10 | 0,5 | 0,5 | 1,6020 | 1,4614 | 1,5587 | 1,4711 |
| 10 | 0,5 | 0,9 | 1,0296 | 0,9743 | 1,0037 | 0,9771 |
| 10 | 0,9 | -0,9 | 13,9441 | 5,9837 | 5,9255 | 5,9832 |
| 10 | 0,9 | -0,5 | 5,9073 | 5,9791 | 5,9019 | 5,9759 |
| 10 | 0,9 | -0,25 | 5,8823 | 5,9670 | 5,8675 | 5,9709 |
| 10 | 0,9 | 0 | 6,6847 | 5,9529 | 6,0039 | 5,9591 |
| 10 | 0,9 | 0,25 | 5,8256 | 5,9088 | 5,7714 | 5,9238 |
| 10 | 0,9 | 0,5 | 5,5353 | 5,8059 | 5,5033 | 5,8462 |
| 10 | 0,9 | 0,9 | 3,5997 | 3,5554 | 3,6072 | 3,6044 |